Le théorème de Thalès

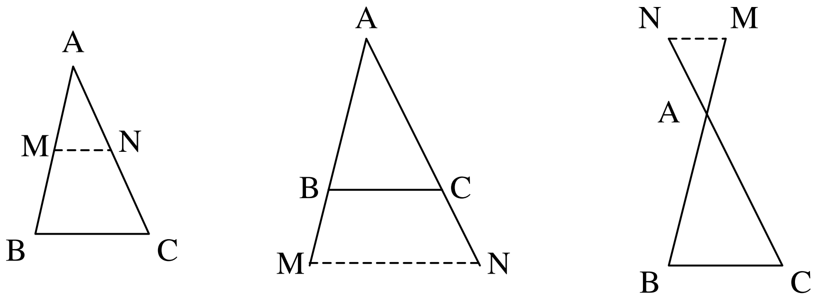
1. Le théorème de Thalès

1) *Configuration de Thalès*

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A
Soient B et M deux points de (d), distincts de A
Soient C et N deux points de (d'), distincts de A

Ou, en résumé :
Les droites (MB) et (NC) sont sécantes en A

Voici les 3 configurations de Thalès « classiques » :



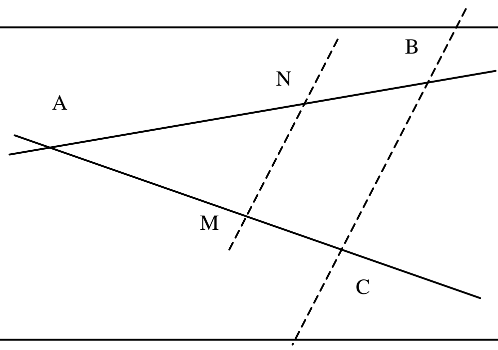
Dans toutes les configurations de Thalès, on retrouve des triangles aux côtés parallèles et dont les longueurs sont proportionnelles.

2) *Enoncé du théorème de Thalès*

Soient deux droites (d) et (d')sécantes en A.
Soient B et M deux points de (d) distincts de A.
Soient C et N deux points de (d') distincts de A.
Les points A, B et M sont dans le même ordre que A, C et N.

SI les droites (BC) et (MN) sont parallèles,

ALORS $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$



Ce théorème de Thalès permet de calculer une longueur quand on en connaît trois autres.

3) *Exemple : Comment rédiger ?*

ABC est un triangle.
La droite (Δ) parallèle à (BC) coupe (AB) en M et (AC) en N, M n'appartenant pas à [AB].
AB = 8 cm ; AC = 6 cm ; AM = 2 cm.

Calculer AN.

Les droites (MB) et (NC) sont sécantes en A.
Les points M, A, B sont dans le même ordre que les points N, A, C .
(MN) // (BC).

Alors, d'après le théorème de Thalès :

On a : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

$\dfrac{2}{8} = \dfrac{AN}{6} = \dfrac{MN}{BC}$

D'où : $AN = \dfrac{6 \times 2}{8}$

$AN = 1,5$ cm

2. Réciproque du théorème de Thalès (et contra posée)

1) Enoncé de la réciproque

Soient deux droites (d) et (d')sécantes en A.
Soient B et M deux points de (d) distincts de A.
Soient C et N deux points de (d') distincts de A.
SI $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ **et SI les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre,**
ALORS les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

La réciproque du théorème de Thalès permet de démontrer que des droites sont parallèles.

2) Exemples : Comment rédiger ?

ABC est un triangle tel que : AB = 8 cm ; AC = 6 cm ; BC = 4 cm
M et N sont respectivement des points de [AB] et [AC]
Que peut-on dire des droites (BC) et(MN) ?

(a) On a : AM = 6 cm et AN = 4,5 cm.

Les droites (MB) et (NC) sont sécantes en A

On calcule :
D'une part :
$\frac{AM}{AB} = \frac{6}{8}$

$= 0,75.$

.D'autre part :
$\frac{AN}{AC} = \frac{4,5}{6}$

$= 0,75.$

Comme $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.
Et comme les points A, M, B et les points A, N, C sont alignés dans le même ordre,

alors, d'après la réciproque du théorème de Thalès,

les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

(b) On a : AM = 6 cm et AN = 4,8 cm.

Les droites (MB) et (NC) sont sécantes en A

On calcule :
D'une part :
$\frac{AM}{AB} = \frac{6}{8}$

$= 0,75$

.D'autre part :
$\frac{AN}{AC} = \frac{4,8}{6}$

$= 0,8$

Comme $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$.

le théorème de Thalès n'est pas vérifié

Donc, (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

3. Agrandissement et réduction

Définition

L'**agrandissement** de rapport k d'un objet est la transformation qui consiste à multiplier toutes les longueurs de cet objet par un nombre $k>1$.
Si $k<1$, on parle de **réduction**.

L'agrandissement (réduction) est une situation de proportionnalité (Théorème de Thalès)

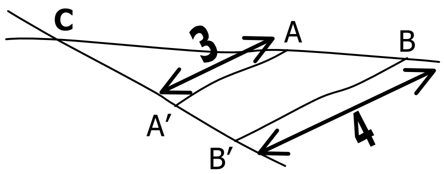
propriété

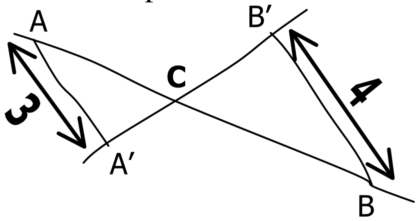
Dans un agrandissement (une réduction) de rapport k :
- Les **longueurs** sont multipliées par k.
- Les **aires** sont multipliées par k^2.
- Les **volumes** sont multipliés par k^3

4. Placer des points sur une droite

A et B sont deux points distincts. Trouver tous les points C sur (AB) vérifiant l'égalité : $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{3}{4}$

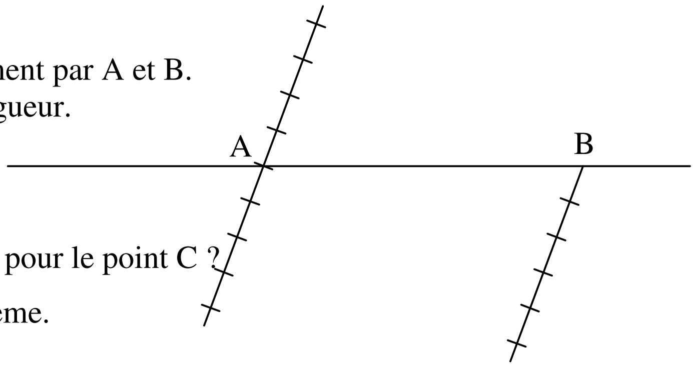
Pour résoudre le problème, on va construire une (ou plusieurs) configurations « de Thalès », dans laquelle les deux parallèles passeront par A et B.
En plaçant judicieusement A' et B' sur chaque parallèle, on aura l'égalité des 3 rapports :
$\dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CA'}{CB'} = \dfrac{3}{4}$
Le point C, intersection des droites (AB) et (A'B') vérifiera nécessairement le problème.





<u>Démarche :</u>

a. tracer la droite (AB).
b. Tracer deux droites parallèles passant respectivement par A et B.
c. Graduer ces deux axes avec la même unité de longueur.
d. Placer un point B' tel que BB'= 4,
puis un point A' tel que $\dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{3}{4}$.
Combien y-a -t-il de possibilité pour le point A' ? et pour le point C ?



e. Trouver alors le (les) point(s) C vérifiant le problème.